Title	直接制御系の絶対安定について (常微分方程式と非線形力学)
Author(s)	布川, 昊
Citation	数理解析研究所講究録 (1971), 113: 59-70
Issue Date	1971-03
URL	http://hdl.handle.net/2433/106410
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
113巻 1971年 59-70

直接制御系の絶対安定について

京大 工　布川昊

§1. 序

直接制御系の絶対安定問題を、Liapunovの直接法を用いて考察した結果、一つの定理を得たのでそれを報告する.

直接制御系

$$\dot{x} = Ax - b\varphi(\sigma) \quad , \quad \dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$$
$$\sigma = c'x \qquad (1)$$

において，xはn次元状態ベクトル，Aは$n \times n$定数行列で安定，すなわちAの固有値の実数部分はすべて負，であるとする。さらに、b，cはn次元定数ベクトル，c'はcの転置ベクトルを表わすものとする．以下プライム"′"によって行列またはベクトルの転置を表わすことにする。また、スカラ変数σのスカラ値関数$\varphi(\sigma)$は次の条件を満す関数族$\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} : \begin{array}{ll} \text{(i)} & \varphi(\sigma) \in C(-\infty, \infty) \\ \text{(ii)} & \sigma\varphi(\sigma) \geqq 0 \end{array} \qquad (2)$$

に属する任意の関数であるとする。

$\varphi(\sigma) \in \mathcal{F}$ なる任意の関数に対して、直接制御系（1）の原点０が大域的漸近安定となるとき、（1）の原点は絶対安定であると云う。

系（1）が絶対安定となるための十分条件としては、Lefschetz による次の結果が代表的である。

［定理１］　Cを適当な正定値行列（$C > 0$）とするとき、$A'B + BA = -C$ を満たす行列 $B > 0$ に対して、

$$\begin{aligned} &(\mathrm{i}) \quad c'b = \left(Bb - \tfrac{1}{2}A'c\right)' C^{-1} \left(Bb - \tfrac{1}{2}A'c\right) \\ &(\mathrm{ii}) \quad cA^{-1}b \leqq 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

が成立すれば、直接制御系（1）は絶対安定である。

［証明］文献 1）を参照。∎

本稿の目的は、定理１と等価な、より簡単な定理を提案することにある。すなわち、

（1）　定理1の条件（i）は、これと等価なより簡単な条件で置き換えられる。

（2）　条件（ii）は条件（i）より導びかれる。

（3）　定理１の証明は簡単化される。

以上の3点を示すのが、これからの主目的である。

§2. 新定理の記述と証明

[定理2]　$A'B + BA = -C$　を満す正定値行列 $C, B > 0$ に対して

$$A^{-1}b = -\frac{1}{2}B^{-1}c \qquad (4)$$

が成立すれば，系(1)は絶対安定である．

[証明]　V関数として定石通り

$$V(x) = x'Bx + \int_0^{c'x} \varphi(\sigma)\,d\sigma$$

を選ぶ．明らかに，$V(x)$は連続的微分可能，$V(x) > 0$，$(x \neq 0)$ でかつ　$V(x) \to \infty$　$(\|x\| \to \infty)$　である。ここで $\|x\|$ は x のユークリッドノルムを表わす．さて

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= (2Bx + c\varphi(c'x))' \cdot \dot{x} \\ &= (2Bx + C\varphi)' \cdot (Ax - b\varphi) \\ &= (x + \frac{1}{2}B^{-1}c\varphi)' 2BA(x - A^{-1}b\varphi)\end{aligned}$$

であるから、定理の条件を用いて，

$$\dot{V}(x) = (x+\frac{1}{2}B^{-1}c\varphi)'2BA(x+\frac{1}{2}B^{-1}c\varphi)$$

$$= -(x+\frac{1}{2}B^{-1}c\varphi)C(x+\frac{1}{2}B^{-1}c\varphi)$$

$$\leqq 0$$

を得る。次に $\dot{V}(x)$ が負定値であることを示そう。[2)]

$\dot{V}(x)=0$ となるのは、$C>0$ であるから

$$x+\frac{1}{2}B^{-1}c\varphi(c'x)=0 \qquad (5)$$

のときに限るが、$x=0$ が(5)の唯一つの解であることを示せばよい。(5)と c との内積を作れば、

$$c'x+\frac{1}{2}c'B^{-1}c\,\varphi(c'x)=0$$

となる。いま $\varphi(c'x)\neq 0$ とすれば、$\sigma\varphi(\sigma)\geqq 0$ より、

$$0<\frac{c'x}{\varphi(c'x)}=-\frac{1}{2}c'B^{-1}c<0$$

となり矛盾である。よって $\varphi(c'x)=0$、それ故(5)より

$$x=-\frac{1}{2}B^{-1}c\,\varphi(c'x)=0$$

を得、$\dot{V}(x)$ が負定値関数であることが示された。■

応用例　文献 1) の例 (p. 41) を取上げよう．

$$A = \mathrm{diag}\,(-\mu_1, \cdots, -\mu_n) \qquad (\mu_i > 0)$$

とする。このとき、$C = \mathrm{diag}\,(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $(\alpha_i > 0)$ とおけば $A'B + BA = -C$ の解として

$$B = \mathrm{diag}\left(\frac{\alpha_1}{2\mu_1}, \cdots, \frac{\alpha_n}{2\mu_n}\right)$$

を得る。さて、定理の条件は

$$A^{-1}b + \frac{1}{2}B^{-1}c = A^{-1}\left(b + \frac{1}{2}AB^{-1}c\right) = 0 \qquad (6)$$

であるが、

$$AB^{-1} = \left(-\frac{2\mu_1^2}{\alpha_1}, \cdots, -\frac{2\mu_n^2}{\alpha_n}\right)$$

を用いて、(6) を成分で書けば

$$b_i - \frac{\mu_i^2}{\alpha_i}c_i = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

となる。よつて $b_i c_i > 0$ $(i = 1, \cdots, n)$ ならば $\alpha_i > 0$ $(i = 1, \cdots, n)$ となるようにとれるから、

« $A = \mathrm{diag}\,(-\mu_1, \cdots, -\mu_n)$, $\mu_i > 0$ $(i = 1, \cdots, n)$ のとき系 (1) が絶対安定であるための十分条件は、すべての i に対して、$b_i c_i > 0$ となることである。»

を得る。

§3. 定理1と定理2との関係

§1の最後に述べたように、定理1と定理2の等価性を示すことができる。そのためには、間接制御系における La-Salle の定理を補正した形で用いる。

［補題］ ベクトル x の2次式

$$F(x) \equiv x'Ax + 2b'x + c, \quad A' = A > 0$$

が非負となるための必要十分条件は、この2次式の判別式が非負となることである。すなわち、

$$\begin{vmatrix} A & b \\ b' & c \end{vmatrix} = |A|(c - b'A^{-1}b) \geq 0 \qquad (7)$$

また判別式が0となるとき、$F(x) = 0$ となるのは、

$$x = -A^{-1}b \quad \text{又は} \quad Ax + b = 0 \qquad (8)$$

のときに限る。

［証明］

$$F(x) = (x + A^{-1}b)'A(x + A^{-1}b) + c - b'A^{-1}b \quad \blacksquare$$

[定理３]　$A'B + BA = -C$ を満す $C,\ B > 0$ に対して、

$$(Bx-y)'C^{-1}(Bx-y) \geqq 2y'A^{-1}x \qquad (9)$$

が成立する。さらに等号は、

$$A^{-1}x + (A'B)^{-1}y = 0 \qquad (10)$$

のときのみ成立する。

[証明]

$$(Bx-y)'C^{-1}(Bx-y) - 2y'A^{-1}x \qquad (11)$$

を Bx の２次式と考えて整理すれば、

$$(Bx)'C^{-1}(Bx) - 2y'[C^{-1}+(BA)^{-1}](Bx) + y'C^{-1}y$$

となる、この判別式は０である．すなわち

$$y'C^{-1}y - y'[C^{-1}+(BA)^{-1}]C[C^{-1}+(A'B)^{-1}]y = 0$$

何となれば

$$[C^{-1}+(BA)^{-1}]C = -(BA)^{-1}(A'B)$$

$$[C^{-1}+(A'B)^{-1}]C = -(A'B)^{-1}(BA)$$

を乗ずれば、

$$C^{-1} = [C^{-1} + (BA)^{-1}]C[C^{-1} + (A'B)^{-1}]$$

となるからである。よって（11）式は，$C^{-1} > 0$ であるから、補題より非負、すなわち（9）式を得る。（10）式は補題の後半より得られ、(9) 式で等号が成立するのは

$$Bx - C[C^{-1} + (A'B)^{-1}]y = 0$$

のとき、すなわち（10）式が成立するときに限る。∎

この定理の系として次の重要な結果を得る。

［系1］ $(Bb - \frac{1}{2}A'c)'C^{-1}(Bb - \frac{1}{2}A'c) = c'b$ と

$$A^{-1}b + \frac{1}{2}B^{-1}c = 0$$

は等価である。

［証明］ 定理3の後半で， $x = b$ ，$y = \frac{1}{2}A'c$ とおけばよい。∎

［系2］ 定理1で (ii) の条件は不要である。

［証明］ 系2により，

$$cA^{-1}b = -\frac{1}{2}cB^{-1}c < 0$$ ∎

§4. 拾遺

定理3の一つの応用として、間接制御系

$$\dot{x} = Ax - b\varphi(\sigma)$$
$$\dot{\sigma} = c'x - \rho\varphi(\sigma) \qquad (12)$$

の絶対安定問題を取扱う．ただし $\varphi(\sigma)$ として条件$\mathfrak{F}$に、さらに

$$\int_0^{\sigma\to\pm\infty}\varphi(\sigma)\,d\sigma \to \infty$$

を附け加えることにする。他は系(1)と同じ条件とする。

［定理4］ 間接制御系(12)において、

$$A^{-1}b + \frac{1}{2}(A'B)^{-1}c = 0 \quad , \quad A'B + BA = -C$$

なる $C > 0$ が存在するとき、系(12)が絶対安定となるための必要十分条件は、

$$\rho > c'A^{-1}b \qquad (13)$$

である．つまり Aizerman の推測が成立する。

［証明］ 必要性 (12)が絶対安定ならば、$\varphi(\sigma) = \sigma$ とおいた系も漸近安定であるから、

$$c'A^{-1}b - \rho = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} A & -b \\ c' & -\rho \end{vmatrix} < 0 \qquad (13)'$$ [3)]

十分性．周知のように

$$\rho > (Bb-\tfrac{1}{2}c)'C^{-1}(Bb-\tfrac{1}{2}c),\quad A'B+BA=-C,\quad C>0 \tag{14}$$

ならば、(12)は絶対安定であるが、定理3の後半より、$x=b$, $y=\frac{1}{2}c$　とおけば、定理の仮定により、

$$(Bb-\tfrac{1}{2}c)'C^{-1}(Bb-\tfrac{1}{2}c) = c'A^{-1}b$$

と得る．よって(14)の第1式と(13)式は同一である。∎

[註1]　定理4の証明から分るように．(14)式が成立すれば、(13)式が成立するのであるから、

$$(Bb-\tfrac{1}{2}c)'C^{-1}(Bb-\tfrac{1}{2}c) \geq c'A^{-1}b \tag{15}$$

が成立する．これは *LaSalle* の定理に外ならない。

[註2]　(7)式は、次のように考えれば一番容易にでる。2次式　$(x,1)\begin{pmatrix} A, & b \\ b', & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$　は変数変換 $x \to X = x + A^{-1}b$ によって．xの1次の項を消すことができる．変換の行列は

$\begin{pmatrix} E, & -A^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，Eは単位行列　であるから、これを用い

$$\begin{vmatrix} A & b \\ b' & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} E & -A^{-1}b \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ b' & c-b'Ab \end{vmatrix}$$

より直ちに（7）式を得る.

（13）′ の等式部分も、同様に考えて $\begin{vmatrix} A & b \\ c' & \rho \end{vmatrix}$ に左から $\begin{vmatrix} E & 0 \\ -c'A^{-1} & 1 \end{vmatrix}$ を掛けるか，右から，$\begin{vmatrix} E, & -A^{-1}b \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ を掛けることによって、直ちに得られる。

§5. 引用文献

1） Lefschetz, S : Stability of Nonlinear Control Systems ; Academic Press. (1965)

2） LaSalle 教授よりの私信

3） Halanay A : Differential Equations ; stability, oscillations, time lags ; Academic Press, (1966)

また次の文献より、多くの示唆を与えられた。

4） 吉沢太郎 ： 自動制御における絶対安定について； 数理解析研究所講究録 16 （1966）.

5) 加藤順二：非線型制御系の絶対安定性について；
数理解析研究所研究集会予稿（1967）.

なお(2)式の(ii) $\sigma\varphi(\sigma) \geqq 0$ において、等号を入れても成立することを、荒木光彦氏より御教示頂いた。これらの方々に謝意を表する。